2.3. Macierz odwrotna

Definicja 2.19. *Macierzą odwrotną* do macierzy kwadratowej A nazywamy macierz kwadratową tego samego stopnia (oznaczamy przez A^{-1}) taką, że

$$A \cdot A^{-1} = I, \qquad (1)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

Jeżeli macierz odwrotna A^{-1} istnieje, to mówimy, że A jest *macierzą odwracalną.*

Definicja 2.20. Macierz kwadratową A nazywamy *macierzą nieosobliwą,* jeżeli $|A| \neq 0$. W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz A jest *osobliwą.*

Twierdzenie 2.13. Macierz odwrotna do macierzy A istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą nieosobliwą.

Definicja 2.21. *Macierzą dołączoną* A^D do macierzy kwadratowej A nazywamy macierz transponowaną do macierzy dopełnień algebraicznych elementów a_{ij} macierzy A, tzn.

$$A^D = \left[A_{ij}\right]^T.$$

Twierdzenie 2.14. Jeżeli A jest macierzą nieosobliwą, to

$$A^{-1} = \frac{A^D}{|A|}. \qquad (2)$$

Przykład 2.15. Obliczyć macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Ponieważ $|A| = 1 \neq 0$, to macierz odwrotna A^{-1} istnieje. Korzystając ze wzoru (2.8) obliczamy dopełnienia algebraiczne A_{ij} elementów macierzy A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Więc mamy

$$\left[A_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$A^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem macierz odwrotna ma postać

$$A^{-1} = \frac{A^D}{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Macierz odwrotna ma następujące własności.

Twierdzenie 2.15. Niech A i B są macierzami nieosobliwymi tego samego stopnia. Wtedy mamy

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A, \tag{3}$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}, \tag{4}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \tag{5}$$

$$I^{-1} = I,$$

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T, \tag{6}$$

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{7}$$

Przykład 2.16. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązać podane równania macierzowe:

a) $A \cdot X = B$; **b)** $A \cdot X \cdot A^{-1} = B$; **c)** $A \cdot X \cdot C + B = A$.

Rozwiązanie. a) Ponieważ $|A| = 1 \neq 0$, więc macierz odwrotna A^{-1} istnieje i podane równanie jest równoważne równaniom:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Obliczymy najpierw macierz A^{-1}. Mamy

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1, \;\; A_{12} = (-1)^3 \cdot 0 = 0, \;\; A_{21} = (-1)^3 \cdot 2 = -2, \;\; A_{22} = (-1)^4 \cdot 1 = 1.$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{\left[A_{ij}\right]^T}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teraz możemy obliczyć macierz X. Mamy

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Równanie $A \cdot X \cdot A^{-1} = B$ jest równoważne równaniu

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

czyli

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A.$$

Ponieważ

$$A^{-1}\cdot B\cdot A=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-5)\cdot 1+1\cdot 0 & (-5)\cdot 2+1\cdot 1\\ 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 2+1\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -9\\ 2 & 5\end{bmatrix},$$

więc rozwiązanie ma postać

$$X=\begin{bmatrix}-5 & -9\\ 2 & 5\end{bmatrix}.$$

c) Mnożąc obie strony równania $A\cdot X\cdot C+B=A$ lewostronnie przez A^{-1} otrzymamy

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot C+A^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot A,$$

$$X\cdot C+A^{-1}\cdot B=I,$$

$$X\cdot C=I-A^{-1}\cdot B.$$

Macierz C jest odwracalna, ponieważ $|C|=-1$. Zatem mnożąc prawostronnie obie strony powyższego równania przez C^{-1} otrzymamy

$$X\cdot C\cdot C^{-1}=\left(I-A^{-1}\cdot B\right)\cdot C^{-1},$$

$$X=C^{-1}-A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1},$$

Obliczymy C^{-1}. Dopełnienia algebraiczne w tym przypadku wyglądają następująco:

$$C_{11}=1,\quad C_{12}=-1,\quad C_{21}=0,\quad C_{22}=-1.$$

Zatem

$$C^{-1}=\frac{\left[C_{ij}\right]^{T}}{|C|}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Podstawiając C^{-1} do równania i korzystając z tego, że macierz $A^{-1}\cdot B$ jest rozwiązaniem przykładu a), mamy

$$X=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

i ostatecznie

$$X=\begin{bmatrix}-7 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Definicja 2.22. Macierz kwadratową nazywamy *macierzą ortogonalną,* jeżeli zachodzi równość

$$A^{T}=A^{-1}.$$

Twierdzenie 2.16. Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1.

Przykład 2.17. Macierz

$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix},$$

gdzie $\varphi\in\mathbb{R}$, jest macierzą ortogonalną. Rzeczywiście, mamy

$$|A|=\cos\varphi\cdot\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\sin\varphi=1.$$

Stąd macierz odwrotna ma postać

$$A^{-1}=\left[A_{ij}\right]^{T}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Zatem $A^{T}=A^{-1}$.

2.4. Rząd macierzy

Niech A jest macierzą prostokątną o wymiarze $m \times n$, tzn. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Definicja 2.23. *Rzędem macierzy* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy liczbę r, która jest równa najwyższemu stopniowi różnych od zera minorów tej macierzy.

Rząd macierzy A oznaczamy przez $R(A)$ lub $rząd(A)$. Przypomnijmy, że minorem macierzy A nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej powstałej z macierzy A przez usunięcie pewnej ilości wierszy i kolumn.

Z definicji 2.23 wynika bezpośrednio, że jeżeli A jest macierzą kwadratową nieosobliwą stopnia n, to $R(A) = n$. Również łatwo można sprawdzić, że dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ spełniona jest nierówność

$$0 \le R(A) \le \min\{m, n\}$$

oraz równość

$$R(A) = R(A^T).$$

Zaznaczmy, że $R(A) = 0$ tylko w przypadku macierzy zerowej.

Przykład 2.18. Wyznaczyć rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Macierz A jest macierzą o wymiarze 2×3. Zatem $1 \le R(A) \le 2$. Skreślając ostatnią kolumnę otrzymamy minor stopnia 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \ne 0.$$

Stąd $R(A) = 2$.

Dla macierzy B mamy

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem $R(B) < 3$. Ponieważ, na przykład następujący minor drugiego stopnia

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ne 0,$$

więc $R(B) = 2$.

Korzystając z własności wyznaczników można stwierdzić, że przekształcenia elementarne macierzy, tzn. przestawienia wierszy (kolumn), mnożenie wiersza (kolumny) przez liczbę różną od zera, dodawania do wiersza (kolumny) kombinacji liniowej pozostałych wierszy (kolumn) itd., nie zmienia rzędu macierzy.

Przykład 2.19. Wyznaczyć rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Przekształcając macierz mamy

$$rząd(A) = rząd(A^T) = rząd\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} = rząd\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4-1-3 \\ 2 & 1 & 3-2-1 \\ 0 & 1 & 1-0-1 \\ 2 & 5 & 7-2-5 \end{bmatrix} =$$

$$= rząd\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = rząd\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 2\,.$$

Ostatnia równość zachodzi, ponieważ minor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch